Soal dan Pembahasan Tentang Suku Banyak

1. Nilai suku banyak untuk f (x) = 2x $- x^2 - 3x + 5$ untuk $x = -2$ adalah ....
   Jawab :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 5 \\ &= -16 - 4 + 6 + 5 \\ &= -20 + 11 \\ &= -9 \end{aligned}$$

2. Sisa pembagian $3x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 6x - 10$ oleh $(3x - 1)$ adalah ....
   Jawab :
   Dengan menggunakan metode Horner maka dengan mudah kita bisa menyelesaikan soal tersebut.

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{3} & 3 & 5 & -11 & 6 & -10 \\ & & 1 & 2 & -3 & 1 \\ \hline & 3 & 6 & -9 & 3 & -9 \end{array}$$

   Jadi sisanya adalah 9

   Catatan : dibandingkan dengan menggunakan metode substitusi, metode ini lebih simpel dan mudah karena tidak perlu menghitung angka dalam jumlah besar. Coba bandingkan dengan menggunakan metode substitusi maka akan terlihat lebih rumit walaupun hasilnya sama. Silahkan anda coba sebagai bahan latihan

3. Jika $x^3 - 4x^2 + 5x + p$ dan $x^2 + 3x - 2$ dibagi oleh $x + 1$ memberikan sisa yang sama maka nilai p adalah ....
   Jawab :

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x + p \\ Q(-1) &= (-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) + p \\ &= -1 - 4 - 5 + p \\ Q(-1) &= -10 + p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(x) &= x^2+3x-2\\
R(-1) &= (-1)^2+3(-1)-2\\
&= 1-3-2\\
R(-1) &= -4
\end{aligned}
$$

Karena $Q(-1)=R(-1)$ maka

$$
\begin{aligned}
-10+p &= -4\\
p &= -4+10\\
p &= 6
\end{aligned}
$$

4. Jika suku banyak $x^5+x^4-2x^3+2$ di bagi oleh $x-1$ maka sisanya adalah ....
   Jawab :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^5+x^4-2x^3+2\\
f(-1) &= 1^5+1^4-2(1)^3+2\\
&= 1+1-2+2\\
&= 2
\end{aligned}
$$

5. Suku banyak $6x^3+7x^2+px-24$ habis dibagi oleh $2x-3$. Nilai p adalah ....

   Jawab :
   Dengan menggunakan metode Horner kita dapatkan

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{3}{2} & 6 & 7 & p & -24\\
 & & 9 & 24 & \frac{(72+3p)}{2}\\
\hline
 & 6 & 16 & (24+p) & \frac{(72+3p)}{2}-24
\end{array}
$$

   Jadi nilai p adalah

$$
\begin{aligned}
\frac{72+3p}{2} &= 24\\
72+3p &= 48\\
3p &= -24\\
p &= -8
\end{aligned}
$$

6. Jika x^3-2x+a habis dibagi oleh $x-2$ maka suku banyak tersebut juga habis dibagi oleh ....

Jawab :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x + a \\ f(2) &= 8 - 4 + a \\ a + 4 &= 0 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

Diperoleh $f(x) = x^3 - 2x - 4$ Karena faktor dari 4 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ sehingga dapat kita uji satu persatu.
Untuk $x = 1$ maka $f(1) = 1^3 - 2(1) - 4 = -5$ bukan faktor dari $f(x)$
Untuk $x = -2$ maka $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) - 4 = -8$ bukan faktor dari $f(x)$
Dari hasil pengujian ternyata hanya ada satu faktor real dari $f(x)$ yaitu $x - 2$. jadi $f(x)$ tidak habis di bagi oleh faktor selain $x - 2$

7. Hasil dan sisa dari pembagian $4x^3 + 5x^2 - 8$ dibagi oleh $x + 2$ berturut-turut adalah ....
Jawab :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 5 & 0 & -8 \\ -2 & & -8 & 6 & -12 \\ \hline & 4 & -3 & 6 & -20 \end{array}$$

dari pembagian Horner diatas di peroleh hasil bagi $4x^2 - 3x + 6$ dan sisa -20

8. Hasil bagi dan sisa suku banyak $3x^3 + 10x^2 - 8x + 3$ dibagi $x^2 + 3x - 1$ berturut-turut adalah ....
Jawab :

$$\begin{array}{rl} & \quad 3x + 1 \\ \cline{2-2} x^2 + 3x - 1 \big) & 3x^3 + 10x^2 - 8x + 3 \\ & -3x^3 - 9x^2 + 3x \\ \cline{2-2} & \quad x^2 - 5x + 3 \\ & \quad -x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2} & \quad -8x + 4 \end{array}$$

dari pembagian bersusun pendek diatas di peroleh hasil bagi $3x + 1$ dan sisa $-8x + 4$

9. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x - 2$ sisanya 24 sedangkan jika di bagi dengan $x + 5$ sisanya 10. Jika $f(x)$di bagi dengan $x^2 + 3x - 10$ sisanya adalah ....
Jawab :
Misalkan sisa dari pembagian tersebut adalah $Ax + B$. Perhatikan bahwa

$$f(x) = H(x) \cdot P(x) + S(x)$$

dalam hal ini $H(x)$: Hasil bagi, $P(x)$: Pembagi dan $S(x)$: sisa pembagian sehingga dari keterangan soal diperoleh

$$f(x) = H(x) \cdot (x - 2)(x - 5) + Ax + B$$

Sebelumnya kita peroleh bahwa $f(2) = 24$ dan $f(-5) = 10$. Masukkan kedalam persamaan diatas mendapatkan

$$\begin{aligned} f(2) &= H(2)\cdot(2-2)(2-5) + 2A + B \\ 24 &= 2A + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-5) &= H(-5)\cdot(-5-2)(-5-5) - 5A + B \\ 10 &= -5A + B \end{aligned}$$

Eliminasi dua persamaan diatas mendapatkan $A = 2$ dan $B = 20$ sehingga sisanya adalah $2x + 20$

10. Suku banyak $2x^3 + ax^2 - bx + 3$ dibagi oleh $\left(x^2 - 4\right)$ bersisa $(x + 23)$. Nilai $a + b$ adalah......

Jawab :

Menggunakan pembagian bersusun pendek di dapatkan

$$\begin{array}{rlrr} & & 2x & +\,a \\ \cline{2-4} x^2 - 4\,) & 2x^3 + ax^2 & -\,bx & +\,3 \\ & -\,2x^3 & +\,8x & \\ \cline{2-3} & \quad ax^2 + (8 + -1b)\,x & & +\,3 \\ & \quad -\,ax^2 & & +\,4a \\ \cline{2-4} & & (8 + -1b)\,x + (3 + 4a) & \end{array}$$

Perhatikan bahwa sisa dari pembagian diatas adalah $(-bx + 8x + 3 + 4a)$ sedangkan keterangan dalam soal sisanya adalah $(x + 23)$. Dengan memanfaatkan kesamaan suku banyak kita dengan mudah menyelesaikannya. Perhatikan penjelasan berikut.

$$\begin{aligned} -bx + 8x + 3 + 4a &= x + 23 \\ x(-b + 8) + 3 + 4a &= x + 23 \end{aligned}$$

Dari kesamaan diatas diperoleh bahwa $-b + 8 = 1 \Longrightarrow b = 7$ dan $3 + 4a = 23 \Longrightarrow a = 5$. Sehingga di dapatkan $a + b = 7 + 5 = 12$

11. Suku banyak $f(x)$ habis di bagi oleh $(x - 1)$. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - 1)(x + 1)$ adalah ....

Jawab :

$f(x)$ habis di bagi oleh $(x - 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x)(x - 1) + 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan sisa dari pembagian tersebut adalah $Ax+B$. Sementara $f(x)$ dibagi $(x - 1)(x + 1)$

mendapatkan

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)(x-1)(x+1) + Ax + B \\
f(1) &= A + B \\
A + B &= 0 \\
A &= -B \\
f(-1) &= -A + B \\
&= B + B \\
f(-1) &= 2B \\
B &= \frac{1}{2} f(-1) \\
A &= -\frac{1}{2} f(-1)
\end{aligned}
$$

Sehingga sisanya adalah

$$
\begin{aligned}
Ax + B &= -\frac{1}{2} f(-1)\, x + \frac{1}{2} f(-1) \\
&= \frac{1}{2} f(-1)(1-x)
\end{aligned}
$$

12. Sisa pembagian $\left(x^2 + ax + b\right) : (x-3)$ adalah 4. Sisa pembagian $\left(x^2 + bx + a\right) : (x-3)$ adalah 10. Nilai $a^2 + b^2$ adalah .....
    Jawab :

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 3^2 + 3a + b \\
4 &= 9 + 3a + b \\
3a + b &= -5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 3^2 + 3b + a \\
10 &= 9 + 3b + a \\
3b + a &= 1
\end{aligned}
$$

Eliminasi dua persamaan diatas di dapatkan nilai $a = -2$ dan $b = 1$ sehingga $a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$

13. Fungsi $f(x)$ dibagi $(x-1)$ sisanya 3 sedangkan jika di bagi $x - 2$ sisanya 4. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x^2 - 3 + 2$ maka sisanya adalah ....
    Jawab :
    Misalkan sisa pembagian adalah $Ax + B$ Sehingga

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)(x-1)(x-2) + Ax + B \\
f(1) &= 0 + A + B \\
3 &= A + B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)(x-1)(x-2)+Ax+B \\
f(2) &= 0+2A+B \\
4 &= 2A+B
\end{aligned}
$$

Eliminasi kembali persamaan diatas mendapatkan nilai $A=1$ dan $B=2$ sehingga sisanya adalah $x+2$

14. Jika $f(x)$ dibagi oleh x^2-2x dan x^2-3x masing-masing mempunyai sisa $2x+1$ dan $5x+2$, maka $f(x)$ dibagi oleh x^2-5x+6 mempunyai sisa ....

Jawab :

Misalkan sisa $Ax+B$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)\,x(x-2)+2x+1 \\
f(2) &= 2(2)+1 \\
f(2) &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)\,x(x-3)+5x+2 \\
f(3) &= 5(3)+2 \\
f(3) &= 17
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)\cdot(x-2)(x-3)+Ax+B \\
f(2) &= 2A+B \\
2A+B &= 5 \\
f(3) &= 3A+B \\
3A+B &= 17
\end{aligned}
$$

Eliminasi kedua persamaan diatas mendapatkan $A=12$ dan $B=-19$ sehingga sisanya adalah $12x-19$

15. Suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $\left(x^2-1\right)$ sisanya $(12x-23)$dan jika di bagi oleh $(x-2)$ sisanya 1. Sisa pembagian suku banyak oleh $\left(x^2-3x+2\right)$ adalah ....

Jawab :

Misalkan sisa pembagian adalah $Ax+B$.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= H(x)(x-1)(x+1)+12x-23 \\
P(1) &= -11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= H(x)(x-2)+1 \\
P(2) &= 1
\end{aligned}
$$

karena $\left(x^2 - 3x + 2 = 0\right)$ dapat difaktorkan menjadi $(x-2)(x-1)$ maka

$$\begin{aligned} P(x) &= H(x) \cdot (x-2)(x-1) + Ax + B \\ P(1) &= A + B \\ A + B &= -11 \qquad (1) \\ P(2) &= 2A + B \\ 2A + B &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Eliminasi persamaan (1) dan (2) mendapatkan $A = 12$ dan $B = -23$ sehingga sisanya adalah $12x - 23$

16. Suku banyak $V(x)$ dibagi $x^2 - x$ dan $x^2 + x$ masing-masing memberikan sisa $5x + 1$ dan $3x + 1$. Jika $V(x)$ dibagi $x^2 - 1$ sisanya adalah ....
Jawab :
Misalkan sisa pembagian $V(x)$ oleh $x^2 - 1$ adalah $Ax + B$

$$\begin{aligned} V(x) &= H(x) \cdot x(x-1) + 5x + 1 \\ V(1) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= H(x)\, x(x+1) + 3x + 1 \\ V(-1) &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= H(x)(x+1)(x-1) + Ax + B \\ V(1) &= A + B \\ A + B &= 6 \qquad (1) \\ V(-1) &= -A + B \\ -A + B &= -2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Eliminasi persamaan (1) dan (2) mendapatkan $A = 4$ dan $B = 2$ sehingga sisanya adalah $4x + 2$

17. Diketahui suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x+1)$ bersisa 8 dan dibagi $(x-3)$ bersisa 4. Suku banyak $g(x)$ jika dibagi $(x+1)$ bersisa -9 dan dibagi $(x-3)$ bersisa 15. Jika $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ maka sisa pembagian $h(x)$ oleh $\left(x^2 - 2x - 3\right)$ adalah ....
Jawab:
Misalkan sisa pembagian adalah $Ax + B$. Perhatikan bahwa suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x+1)$ bersisa 8 dan dibagi $(x-3)$ bersisa 4

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8 \\ f(3) &= 4 \end{aligned}$$

Suku banyak $g(x)$ jika dibagi $(x+1)$ bersisa -9 dan dibagi $(x-3)$ bersisa 15

$$\begin{aligned} g(-1) &= -9 \\ g(3) &= 15 \end{aligned}$$

Dari keterangan soal selanjutnya terlihat bahwa $\left(x^2-2x-3\right)$ dapat difaktorkan menjadi $(x+1)(x-3)$. Selain itu $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ sehingga dengan mudah kita menuliskan suku banyak tersebut menjadi

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) \cdot g(x) &= H(x)(x+1)(x-3) + Ax + B \\ h(-1) = f(-1) \cdot g(-1) &= H(-1)(-1+1)(-1-3) - A + B \\ 8(-9) &= -A + B \\ -A + B &= -72 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) \cdot g(x) &= H(x)(x+1)(x-3) + Ax + B \\ h(3) = f(3) \cdot g(3) &= H(3)(3+1)(3-3) + 3A + B \\ (4) \cdot (15) &= 3A + B \\ 3A + B &= 60 \qquad (2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) dapat kita eliminasi dan mendapatkan nilai $A = 33$ dan $B = -39$ (Untuk kebenarannya silahkan dicek sebagai bahan latihan), Sehingga sisa pembagian $h(x)$ oleh $\left(x^2-2x-3\right)$ adalah $33x - 39$

18. Suku banyak berderajat 3 habis dibagi dengan $x+1$ dan $x-2$. Bersisa 2 jika dibagi dengan $x+1$ dan bersisa 2 jika dibagi dengan x. Suku banyak itu adalah ....
Jawab:
Misalkan suku banyak tersebut adalah $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Dari keterangan soal diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x)(x-1) + 0 \\ f(1) &= 0 \\ f(2) &= 0 \\ f(x) &= H(x)(x+1) + 2 \\ f(-1) &= 2 \\ f(x) &= H(x)(x) + 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai-nilai suku banyak diatas kedalam $f(x)$ mendapatkan

$$\begin{aligned} f(1) &= A + B + C + D = 0 && (1) \\ f(2) &= 8A + 4B + 2C + D = 0 && (2) \\ f(-1) &= -A + B - C + D = 2 && (3) \\ f(0) &= D = 2 && (4) \end{aligned}$$

Dengan memanfaatkan metode eliminasi dan substitusi diperoleh nilai $A = \frac{2}{3}, B = -1, C = -\frac{5}{3}, D = 2$ (Silahkan dicoba sebagai bahan latihan). Jadi suku banyak tersebut adalah $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - \frac{5}{3}x + 2$

19. Jika salah satu akar persamaan $2x^3 - 7x^2 - 7x + 30 = 0$ adalah 3 maka jumlah dua akar yang lain adalah ......

    Jawab :

    Gunakan metode Horner untuk mendapatkan hasil bagi $2x^3 - 7x^2 - 7x + 30 = 0$ dengan 3

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & -7 & 0 \\ 3 & & 6 & -3 & -30 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & -30 \end{array}$$

    (Cara 1). Terlihat bahwa hasil pembagiannya adalah $2x^2 - x - 10 = 0$. Jumlah akar-akarnya dapat kita cari dengan menggunakan rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat yaitu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 + x_2 &= -\frac{(-1)}{2} \\ x_1 + x_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

    (Cara 2) Selain cara diatas kita juga dapat menggunakan cara pemfaktoran dari $2x^2 - x - 10 = 0$. Faktor dari

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 10 &= 0 \\ (2x-5)(x+2) &= 0 \\ x = \frac{5}{2} \quad \text{atau} \quad & x = -2 \end{aligned}$$

    Jumlahkan kedua akar tersebut $x_1 + x_2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

20. Jumlah akar-akar dari persamaan $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ adalah ....

    Jawab :

    Dengan memanfaatkan perluasan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat (atau lebih dikenal dengan teorema Vieta) kita akan dengan mudah menjawab soal tersebut.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ &= -\frac{(-3)}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jika anda ingin mencari akar-akar dari persamaan tersebut tidak ada salahnya dan hasilnya pun akan sama. Silahkan dicoba sebagai latihan.

21. Banyaknya akar-akar rasional bulat dari persamaan $4x^4 - 15x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah ....
Jawab :
Faktor bulat dari 6 adalah $\pm 6, \pm 1, \pm 2, \pm 3$
Untuk $x = 1$ maka

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 - 15 + 5 + 6 \\ &= 0 \;\; (x-1) \text{ adalah faktor dari } f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -15 & 5 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 & -14 & -9 \\ \hline & 1 & 1 & -14 & -9 & -9 \end{array}$$

Mendapatkan hasil $4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = 0$. Sekarang kita mencoba membagi $4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = 0$ dengan $x = -2$ mendapatkan

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 4 & -11 & 0 \\ -2 & & -8 & 8 & 6 \\ \hline & 4 & -4 & -3 & 6 \end{array}$$

Mendapatkan hasil $4x^2 - 4x - 3 = 0$ dengan sisa 0. Sehingga disimpulkan $x + 2$ juga merupakan faktor bulat dari $f(x)$. Untuk mencari faktor yang lainnya kita dapat menggunakan rumus kuadrat (rumus abc) yaitu

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} \\ &= \frac{4 \pm 8}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{4+8}{8} \quad &\text{atau} \quad x_2 = \frac{4-8}{8} \\ x_1 = \frac{12}{8} \quad &\text{atau} \quad x_2 = -\frac{4}{8} \\ x_1 = \frac{3}{2} \quad &\text{atau} \quad x_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga terlihat akar-akarnya adalah $1, -2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. Sehingga dapat disimpulkan Banyaknya akar-akar rasional bulat dari persamaan $4x^4 - 15x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah 2

22. Banyaknya akar-akar real dari persamaan $x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ adalah ....
Jawab :
Faktor bulat dari 2 adalah $\pm 1, \pm 2$
Untuk $x = 1$ maka

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^5 + 1^4 - 2(1)^3 + (1)^2 + 1 - 2 = 0 \\ &= 2 - 2 + 2 - 2 \\ &= 0 \qquad (x-1) \text{ adalah akar dari } f(x) \end{aligned}$$

Untuk $x = -1$ maka

$$\begin{aligned} f(1) &= (-1)^5 + (-1)^4 - 2(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) - 2 = 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \qquad (x+1) \text{ adalah akar dari } f(x) \end{aligned}$$

Untuk $x = 2$ maka

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^5 + (2)^4 - 2(2)^3 + (2)^2 + (2) - 2 = 0 \\ &= 32 + 16 - 16 + 4 \\ &= 36 \qquad (x-2) \text{ bukan akar dari } f(x) \end{aligned}$$

Untuk $x = -2$ maka

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^5 + (-2)^4 - 2(-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 2 = 0 \\ &= -32 + 16 + 16 + 4 - 2 - 2 \\ &= 0 \qquad (x+2) \text{ adalah akar dari } f(x) \end{aligned}$$

Jadi akar-akar realnya adalah $x_1 = -1, x_2 = -2$ dan $x_3 = 1$. Sehingga disimpulkan ada 3 akar-akar real.

Sekian dulu pembahasan yang dapat saya berikan. Mudah-mudahan dapat berguna bagi kita sekalian.