

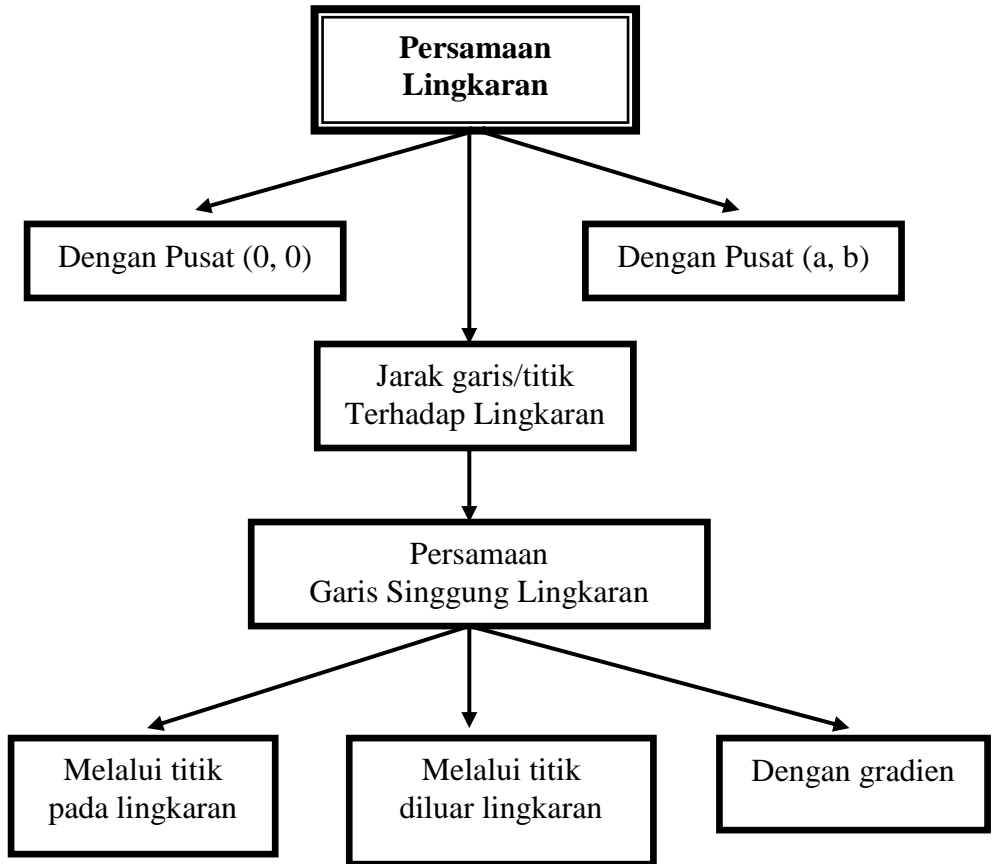
Modul Matematika Wajib Kelas XI Semester 1 “Lingkaran”



Oleh :
Markus Yuniarto, S.Si

Tahun Pelajaran 2016 – 2017
SMA Santa Angela
Jl. Merdeka No. 24 Bandung

Peta Konsep



LINGKARAN

PENDAHULUAN



Lebih dari seribu tahun yang lalu, para ahli matematika Bangsa Yunani biasa memandang garis singgung sebuah lingkaran sebagai sebuah garis yang menyentuh lingkaran hanya di satu titik. **Descartes** bahkan mempunyai argument bahwa pasti ada dua titik potong ketika sebuah garis memotong lingkaran. Jika hanya ada satu titik potong, maka garis itu pastilah garis singgung lingkaran. Mereka hanya menempatkan lingkaran sebagai bangun yang stagnan.

Berlawanan dengan ide-ide tersebut, **Issac Newton**, orang Inggris yang menemukan **Hukum Universal Gravitasi**, mempunyai pendapat yang berbeda mengenai garis singgung. Ia memandang garis singgung pada sebuah titik sebagai limit posisi dari sebuah garis yang melalui titik itu dan titik lain yang bergerak semakin dekat ke titik tadi. Dengan demikian, lingkaran menurut Newton merupakan lintasan lengkung tertutup sederhana yang membolehkan gerakan dan oleh karena itu lingkaran disebut bangun yang dinamis.

STANDAR KOMPETENSI

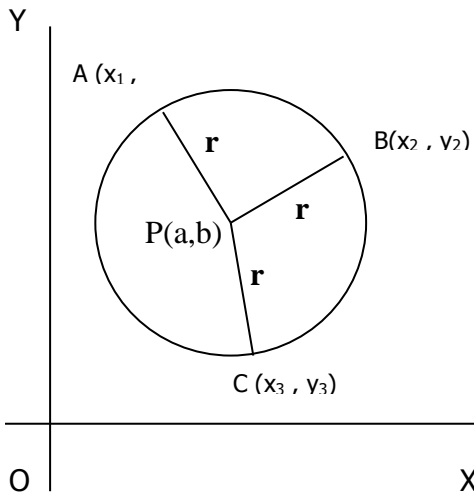
Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya.

KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR

KOMPETENSI DASAR	INDIKATOR
Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan	<ul style="list-style-type: none">• Merumuskan persamaan lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan (a,b).• Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.• Menentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.

	<ul style="list-style-type: none"> • Menentukan posisi dan jarak suatu titik terhadap lingkaran
<p>Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Melukis garis yang menyinggung lingkaran dan menentukan sifat-sifatnya • Merumuskan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran. • Menentukan persamaan garis singgung yang melalui titik di luar lingkaran. • Merumuskan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui.

A. DEFINISI



Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama (jari-jari lingkaran) terhadap sebuah titik tertentu (pusat lingkaran) yang digambarkan pada bidang kartesius.

$P(a, b)$ = Pusat Lingkaran

r = jari-jari lingkaran

$r = AP = BP = CP$

Dalam menentukan persamaan lingkaran, kita harus mengerti tentang formula jarak. Berikut ini diberikan beberapa formula untuk menentukan jarak.

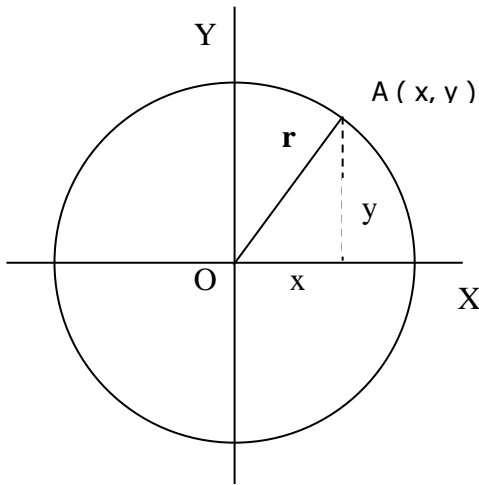
1. Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, ditentukan oleh :

$$J = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. Jarak titik $A(x_1, y_1)$ terhadap garis lurus $ax + by + c = 0$ dirumuskan :

$$J = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

B. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di $O (0,0)$ dan Berjari-jari r



Berdasarkan definisi lingkaran, maka akan diperoleh persamaan lingkaran yang berjari-jari r dan berpusat di titik pangkal $O(0,0)$. Titik $A(x,y)$ pada Lingkaran. Jari-jari lingkaran $r = |OP|$.

Dengan mengingat kembali rumus jarak antara dua titik, maka akan diperoleh rumus persamaan lingkaran:

$$|OP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ex. 1 :

Tentukan persamaan lingkaran yang :

- berpusat di $O(0, 0)$ dan $r = 3$
- berpusat di $O(0, 0)$ dan melalui titik $A(3, 4)$
- berpusat di $O(0, 0)$ dan meyinggung garis $12x - 5y - 39 = 0$

Jawab :

- a. Pusat di $O(0, 0)$ dan $r = 3$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

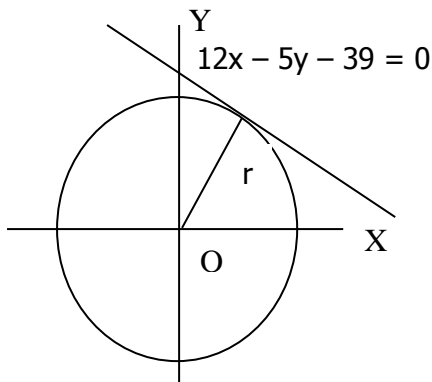
$$x^2 + y^2 = 9 \text{ atau } x^2 + y^2 - 9 = 0$$

- b. Pusat di $O(0, 0)$ dan melalui titik $A(3, 4)$

Karena melalui titik $A(3, 4)$ maka nilai r^2 ditentukan dari $x^2 + y^2 = r^2$ diperoleh nilai

$$r^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow r^2 = 25. \text{ Jadi persamaan lingkarannya adalah } x^2 + y^2 = 25.$$

- c. Pusat di $O(0, 0)$ dan meyinggung garis $12x - 5y - 39 = 0$



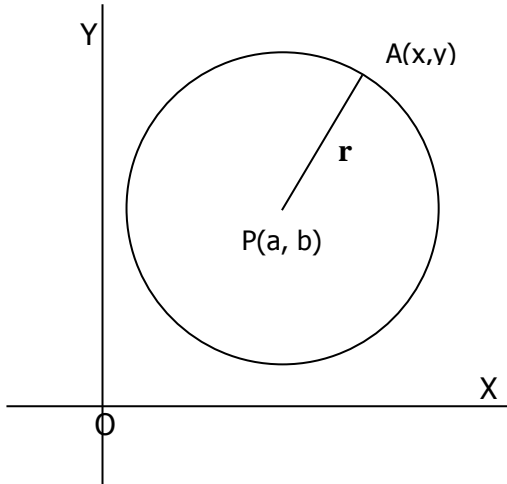
Karena menyinggung garis $12x - 5y - 39 = 0$ maka r merupakan jarak titik pusat $O(0, 0)$ dengan garis $12x - 5y - 39 = 0$. Dengan menggunakan rumus jarak titik terhadap garis diperoleh jar-jari :

$$r = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$r = \left| \frac{12 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + (-39)}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \right| \Rightarrow r = 3$$

Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 9$

C. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di P (a, b) dan Berjari-jari r



Titik A(x, y) pada lingkaran yang berpusat di P(a,b) dan jari-jari lingkaran r, sehingga $|PA| = r$. Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, maka akan diperoleh rumus persamaan lingkaran:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$$
$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Merupakan persamaan baku lingkaran dengan pusat P(a, b) dan jari-jari r.

Ex. 2

Tentukan persamaan lingkaran yang :

- a. berpusat di P(4, 3) dan r = 6
- b. berpusat di P(5, -1) dan melalui A(-1, 7)
- c. berpusat di P(2, 3) dan menyinggung $2x + 3y + 4 = 0$

Jawab :

- a. berpusat di P(4, 3) dan r = 6 maka diperoleh a = 4 dan b = 3

Persamaan Lingkaran : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 6^2$$
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

- b. berpusat di P(5, -1) dan melalui A(-1, 7), maka r = panjang PA = $|PA|$. Dengan menggunakan jarak dua titik diperoleh r = $\sqrt{(-1 - 5)^2 + (7 - (-1))^2} = 10$

Lingkaran XI Wajib Sem 1/2016-2017

$$\text{Persamaan Lingkaran : } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 10^2$$

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 100$$

- c. berpusat di P(2, 3) dan menyinggung $2x + 3y + 4 = 0$

Jari-jari lingkaran merupakan jarak P(2, 3) dengan garis $2x + 3y + 4 = 0$, diperoleh :

$$r = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{2.2 + 3.3 + 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \right| = \left| \frac{17}{\sqrt{13}} \right|$$

$$\text{Persamaan lingkaran: } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \left| \frac{17}{\sqrt{13}} \right|^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{289}{13}$$

$$13(x - 2)^2 + 13(y - 3)^2 = 289$$

LATIHAN 1

Jawablah dengan singkat, jelas dan benar !

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan mempunyai :

a. $r = 4$

.....
.....

b. $r = 2\sqrt{3}$

.....
.....

c. $r = \sqrt{13}$

.....
.....

d. $r = 2 + \sqrt{3}$

.....
.....

2. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan melalui titik :

a. $A(-3, 0)$

.....
.....
.....

b. $B(-2, 3)$

.....
.....
.....

c. $C(6, -8)$

.....
.....

d. $D(0, 5)$

.....
.....
.....

3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan menyinggung garis :

a. $x = 2$

.....
.....
.....
.....
.....

b. $x + 1 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

c. $y = -6$

.....
.....
.....
.....
.....

d. $y - 7 = 0$

.....
.....

D. BENTUK UMUM PERSAMAAN LINGKARAN

Persamaan lingkaran dengan pusat **P(a, b)** dan berjari-jari **r** mempunyai persamaan baku $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, jika bentuk ini dijabarkan maka diperoleh :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, misalkan $A = -2a$, $B = -2b$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$ maka diperoleh **bentuk umum persamaan lingkaran** :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dengan Pusat $P\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C}$

Ex. 3

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$!

Jawab :

Lingkaran : $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$ diperoleh $A = -6$, $B = 8$ dan $C = -24$

Pusat: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (3, -4)$

$$\text{Jari - jari} = \sqrt{\left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C}$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2 - (-24)} = 7$$

Ex 4

Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + by - 12 = 0$ melalui titik $(1, 7)$, tentukan pusat lingkaran tersebut !

Jawab :

Substitusi $(1, 7)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + by - 12 = 0$ diperoleh :

$$1^2 + 7^2 + 4.1 + b.7 - 12 = 0$$
$$7b = -42 \Rightarrow b = -6$$

$$\text{Pusat : } \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right) = (-2, 3)$$

LATIHAN 2

Jawablah dengan singkat, jelas dan benar !

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran berikut !
 - a. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
 - d. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$
2. Tentukan pusat dan jari-jarinya, lingkaran yang melalui titik:
 - a. $(2, 3), (0, -1)$ dan $(3, 0)$
 - b. $(1, 3), (6, -2)$ dan $(-3, -5)$
3. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ melalui titik $(0, -1)$. Tentukan jari-jarinya !
4. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y + m = 0$ berjari-jari 5. Tentukan nilai m !
5. Lingkaran $x^2 + y^2 + 2px + 6y + 4 = 0$ mempunyai jari-jari 3 dan menyinggung sumbu X. Tentukan pusat Lingkaran !
6. Lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 6y + c = 0$ menyinggung garis $x = 2$, tentukan nilai c !
7. Titik (a, b) adalah pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, tent. Nilai $2a + b$!
8. Diketahui Lingk $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$ berjari-jari 2. Garis $x - y = 0$ menyinggung lingkaran tersebut. Tent. Nilai p yang positif !
9. Tentukan persamaan lingkaran yang titik pusatnya terletak pada garis $x = 2$ dan menyinggung sumbu Y di titik $(0, 3)$!
10. Tentukan persamaan lingkaran yang titik pusatnya terletak pada garis $y = -3$ dan menyinggung sumbu X di titik $(-1, 0)$!
11. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $A(6, 3)$ dan menyinggung sumbu X di titik $B(2, 0)$!
12. Tentukan persamaan lingkaran yang konsentris (sepusat) dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 12y - 2 = 0$ dan melalui titik $A(-1, 5)$!

13. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu X positif dan menyinggung garis $y = \frac{4}{3}x$ serta melalui titik $(4, 5\frac{1}{3})$!
14. Tentukan persamaan lingkaran yang berjari-jari 2 satuan dan menyinggung garis $3x + 3y - 7 = 0$ di titik $(2\frac{1}{3}, 0)$!
15. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $-2x + y + 1 = 0$, berjari-jari 5 dan menyinggung sumbu X !
16. Tentukan nilai p yang positif agar lingkaran $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$ dengan jari-jari 2 menyinggung garis $y = x$!
17. Tunjukkan bahwa garis $3x + 4y = 0$ menyinggung lingkaran yang berjari-jari 3 dan berpusat di titik $(5, 0)$!
18. Lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 6y + c = 0$ menyinggung garis $x = 2$, tentukan nilai c !

E. POSISI TITIK TERHADAP LINGKARAN

Ada tiga kemungkinan posisi suatu titik terhadap lingkaran:

1. Titik **terletak pada lingkaran**, jika titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran didapat:
 - a. $x^2 + y^2 = r^2$ atau
 - b. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ atau
 - c. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
2. Titik **terletak di dalam lingkaran**, jika titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran didapat:
 - a. $x^2 + y^2 < r^2$ atau
 - b. $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ atau
 - c. $x^2 + y^2 + Ax + By + C < 0$
3. Titik **terletak di luar lingkaran**, jika titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran didapat:
 - a. $x^2 + y^2 > r^2$ atau
 - b. $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ atau

c. $x^2 + y^2 + Ax + By + C > 0$

Ex. 5

Tanpa menggambar pada bidang kartesius tentukan posisi titik A(1, 2) terhadap lingkaran :

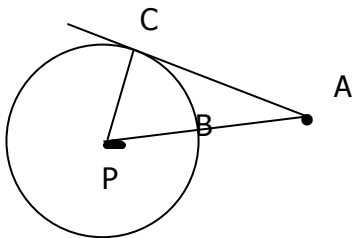
- a. $x^2 + y^2 = 9$
- b. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$
- c. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$

Jawab :

- a. Titik A(1, 2) dan $L \equiv x^2 + y^2 = 9$
Substitusi A(1, 2) ke $L \equiv x^2 + y^2 = 9$ diperoleh $1^2 + 2^2 = 5 < 9$. Jadi A(1, 2) terletak di dalam $L \equiv x^2 + y^2 = 9$.
- b. Titik A(1, 2) dan $L \equiv (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$
Substitusi A(1, 2) ke $L \equiv (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ diperoleh $(1 - 2)^2 + (2 + 1)^2 = 10 = 10$. Jadi titik A(1, 2) terletak pada $L \equiv (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$.
- c. Titik A(1, 2) dan $L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$
Substitusi A(1, 2) ke $L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$ diperoleh $1^2 + 2^2 + 6.1 - 2.2 + 3 = 10 > 0$. Jadi titik A(1, 2) terletak di luar $L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$.

F. JARAK TITIK PADA LINGKARAN

1. Titik di luar lingkaran



Jarak terdekat titik A dengan lingkaran = AB

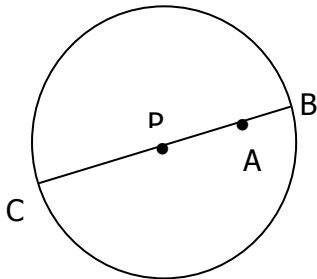
$$AB = AP - PB = AP - r$$

Jarak terjauh titik A dengan Lingkaran = AC

$$AC = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} = \sqrt{(AP)^2 - r^2}$$

dengan r = jari-jari lingkaran.

2. Titik di dalam lingkaran



Jarak terdekat titik A dengan lingkaran = AB

$$AB = PB - AP = r - AP$$

Jarak terjauh titik A dengan Lingkaran = AC

$$AC = CP + AP = r + AP$$

dengan r = jari-jari lingkaran.

Ex. 6

Diberikan titik $A(6, 8)$ dan $L \equiv x^2 + y^2 = 49$. Hitunglah jarak terdekat titik A ke lingkaran L !

Jawab :

Mula-mula kita harus mengetahui posisi titik A terhadap lingkaran L dengan cara mensubstitusi titik $A(6, 8)$ ke $L \equiv x^2 + y^2 = 49$, diperoleh :

$A(6, 8) \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 100 > 49$ jadi titik A berada diluar lingkaran.

$$\text{Jarak terdekat} = AP - r = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} - 7 = 3$$

Jadi jarak terpendek titik A ke lingkaran L adalah 3 satuan panjang.

LATIHAN 3

Jawablah dengan singkat, jelas dan benar !

1. Tentuan posisi titik berikut terhadap lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan berjari-jari 8 !

a. $(2,1)$

b. $(4, -4\sqrt{3})$

c. $(-5,7)$

d. $(0, 8)$

Jawab :

2. Tentuan posisi titik berikut terhadap lingkaran $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$!
a. (-3,-3) b. (-5,2) c. (3,1) d. (1,-2)

Jawab :

3. Tentuan posisi titik berikut terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$
a. (-2,9) b. (8,1) c. (-2,-1) d. (1,2)

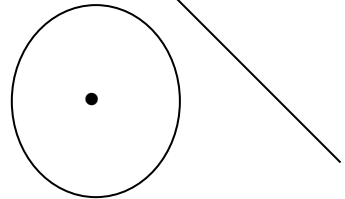
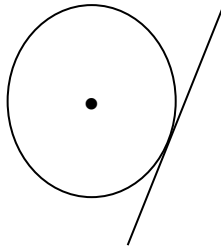
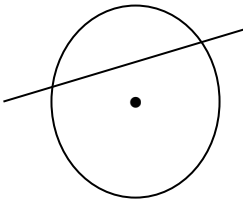
Jawab :

9. Diketahui titik $N(4, 6)$ dan $L \equiv (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 32$.
- a. Tentukan posisi titik N terhadap lingkaran L
 - b. Hitunglah jarak terdekat titik N ke lingkaran L
 - c. Hitunglah jarak terjauh titik N ke lingkaran L
 - d. Panjang garis singgung titik N ke lingkaran L

10. Panjang garis singgung yang ditarik dari titik $R(4, 5)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2kx = 0$ sama dengan satu satuan panjang. Hitunglah nilai k !

G. KEDUDUKAN GARIS TERHADAP LINGKARAN

Secara geometri ada tiga kedudukan garis terhadap lingkaran, yaitu :



- (i) Garis memotong L (ii) Garis menyinggung L (iii) Garis tidak memotong L
Syarat : $D > 0$ Syarat : $D = 0$ Syarat : $D < 0$

Dengan $D = \text{Diskriminan} = b^2 - 4ac$.

Ex. 7

Tentukan posisi garis $y = 3x + 2$ terhadap $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$!

Jawab :

Substitusi garis $y = 3x + 2$ ke $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$, diperoleh:

$\Leftrightarrow x^2 + (3x + 2)^2 + 4x - (3x + 2) + 1 = 0$

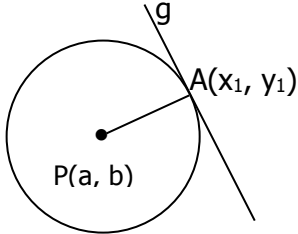
$\Leftrightarrow 10x^2 + 13x + 3 = 0$ sehingga nilai $a = 10$, $b = 13$ dan $c = 3$

Nilai $D = b^2 - 4ac = 169 - 4.10.3 = 49 > 0$

Karena diperoleh $D > 0$ maka garis $y = 3x + 2$ memotong lingkaran L di dua titik yang berlainan.

H. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

1. Pers. Garis singgung lingkaran Melalui Titik pada Lingkaran



Garis g disebut garis singgung Lingkaran L di titik $A(x_1, y_1)$.

Catatan :

1. Titik A harus pada lingkaran L .
2. AP tegak lurus dengan garis singgung g .

Rumus Persamaan Garis Singgung Lingkaran di titik $A(x_1, y_1)$:

Pers. Lingkaran	Pers. Garis Singgung
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1x + y_1y = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

Ex. 8

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran :

- $L \equiv x^2 + y^2 = 5$ di titik $A(1, -2)$
- $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 58$ di titik $B(0, 9)$
- $L \equiv x^2 + y^2 + 4x + 8y - 21 = 0$ di titik $C(2, 1)$

Jawab :

- PGS $L \equiv x^2 + y^2 = 5$ di titik $A(1, -2)$ berarti $x_1 = 1, y_1 = -2$ dan $r^2 = 5$
 $PGS \equiv x_1x + y_1y = r^2 \Rightarrow x - 2y = 5$ atau $x - 2y - 5 = 0$. Jadi persamaan garis singgungnya adalah $x - 2y - 5 = 0$.
- PGS $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 58$ di titik $B(0, 9)$ berarti $x_1 = 0, y_1 = 9, a = -3, b = 2, r^2 = 58$

$$\text{PGS} \equiv (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

$$\Leftrightarrow (0 + 3)(x + 3) + (9 - 2)(y - 2) = 58$$

$$\Leftrightarrow 3x + 7y - 63 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $3x + 7y - 63 = 0$.

- c. $\text{PGS L} \equiv x^2 + y^2 + 4x + 8y - 21 = 0$ di titik $C(2, 1)$ berarti $x_1 = 2, y_1 = 1, A = 4, B = 8, C = -21$.

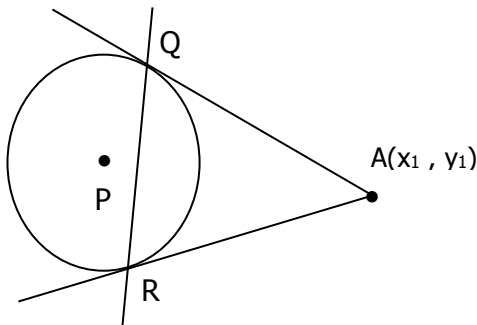
$$\text{PGS} \equiv x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1.y + 2(x + 2) + 4(y + 1) - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 5y - 13 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $4x + 5y - 13 = 0$.

2. Pers. Garis singgung lingkaran Melalui suatu Titik di luar Lingkaran



Langkah-langkah menentukan PGS dari titik di luar lingkaran :

1. Menentukan persamaan garis kutub (rumus yang digunakan sama dengan rumus mencari PGS lingk. diatas)
2. Menentukan titik singgung lingkaran (titik Q dan R) dengan mensubtitusikan pers. Garis kutub ke pers. Lingkaran.
3. Menentukan persamaan garis singgung di titik singgung tersebut

Garis hubung QR disebut Garis kutub atau garis polar.

Garis hubung AQ dan AR disebut garis singgung lingkaran.

Ex. 9

Tentukan PGS pada $x^2 + y^2 = 9$ yang dapat ditarik dari titik $A(0, 4)$!

Jawab :

(i) Menentukan persamaan garis kutub/polar dari titik $A(0, 4)$, berarti $x_1 = 0$, $y_1 = 4$, $r^2 = 9$

$$\text{Pers. Grs kutub} \equiv x_1x + y_1y = r^2 \Rightarrow 0.x + 4y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$$

(ii) Menentukan titik singgung lingkaran dengan cara mensubstitusi pers. Garis polar ke pers. Lingkaran.

$$y = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{144 - 81}{16} = \frac{63}{16}$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{7}}{4} \text{ atau } x_2 = -\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

Jadi titik singgungnya $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$ dan $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$

(iii) Menentukan persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 = 9$ di titik $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$

dan $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$

Garis singgung di titik $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right) \Rightarrow x_1x + y_1y = r^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{7}}{4}x + \frac{9}{4}y = 9$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{7}x + 9y = 36 \Rightarrow \sqrt{7}x + 3y - 12 = 0$$

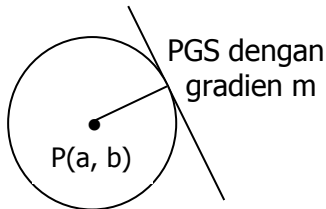
Garis singgung di titik $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right) \Rightarrow x_1x + y_1y = r^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{7}}{4}x + \frac{9}{4}y = 9$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{7}x + 9y = 36 \Rightarrow \sqrt{7}x - 3y + 12 = 0$$

Jadi persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 = 9$ yang ditarik dari titik $A(0, 4)$ adalah $\sqrt{7}x + 3y - 12 = 0$ dan $\sqrt{7}x - 3y + 12 = 0$.

3. Pers. Garis singgung lingkaran dengan Gradien tertentu



Pers. Lingkaran	Pers. Garis Singgung
$x^2 + y^2 = R^2$	$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$	$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

Ex. 10

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran :

- $L \equiv x^2 + y^2 = 9$ dengan gradien 2
- $L \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ yang sejajar dengan garis $3x + 4y - 1 = 0$
- $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ yang tegak lurus garis $x + 2y = 5$

Jawab:

a. $L \equiv x^2 + y^2 = 9$ dengan gradien 2 berarti $m = 2$, $r = 3$

$$\text{PGS} \equiv y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2}$$

$$y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 2x + 3\sqrt{5}$ dan $y = 2x - 3\sqrt{5}$

b. $L \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ yang sejajar dengan garis $3x + 4y - 1 = 0$, berarti $a = -2$, $b = 1$, dan $r = 2$. Gradien garis $3x + 4y - 1 = 0$ adalah $m_1 = -\frac{4}{3}$. Syarat dua garis sejajar $m_1 = m_2$. Jadi $m_2 = -\frac{4}{3}$.

$$\text{PGS} \equiv y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \pm 2\sqrt{1+\frac{16}{9}}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \pm 2\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \pm \frac{10}{3}$$

$$3y - 3 = -4x - 8 \pm 10$$

$$4x + 3y = 3 - 8 + 10 \text{ atau } 4x + 3y = 3 - 8 - 10$$

$$4x + 3y = 5 \text{ atau } 4x + 3y = -15$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

$$4x + 3y - 5 = 0 \text{ atau } 4x + 3y + 15 = 0.$$

c. $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ yang tegak lurus garis $x + 2y = 5$

Dari $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ diperoleh $A = -2$, $B = 6$ dan $C = 5$

Pusat lingkaran = $(1, -3)$ dan $r = \sqrt{1+9-5} = \sqrt{5}$

Dari $x + 2y = 5$ diperoleh $m_1 = -\frac{1}{2}$,

karena tegak lurus maka $m_1 \cdot m_2 = -1$, diperoleh $m_2 = 2$

$$\text{PGS} \equiv y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y + 3 = 2(x - 1) \pm \sqrt{5} \sqrt{1 + 2^2}$$

$$y + 3 = 2x - 2 \pm 5$$

$$2x - y - 5 \pm 5 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $2x - y = 0$ atau $2x - y - 10 = 0$

LATIHAN 4

Jawablah dengan singkat, jelas dan benar !

1. Selidiki hubungan garis dan lingkaran berikut ini :
 - a. $2x + y - 4 = 0$ dan $x^2 + y^2 = 25$
 - b. $y = 2x$ dan $x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$
 - c. $3x + 4y - 12 = 0$ dan $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Buktikan bahwa garis $3x + 2y - 4 = 0$ menyinggung lingkaran yg berpusat di $P(-1, -3)$ dan melalui titik $(1, 0)$. Tentukan titik singgungnya!

.....

.....

.....

.....

3. Garis $y = -2x + c$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 15 = 0$.
Tent. Nilai c !

4. Diket. Garis $4x - 3y + c = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 12x = 0$. Tent. Batas-batas nilai c agar garis tersebut memotong lingkaran di dua titik yang berbeda !

5. Tentukan nilai k agar garis $y = kx$ tidak memotong lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$!

6. Tentukan PGS $x^2 + y^2 = 20$ dititik $(2, 4)$!

7. Tentukan PGS $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ dititik $(1, 2)$!

16. Tentukan persamaan garis singgung pada $L \equiv x^2 + y^2 = 16$ yang :
- Bergradien $\sqrt{2}$
 - Tegak lurus garis $y = 2x - 4$
 - Sejajar garis $2x - y - 4 = 0$
17. Tentukan persamaan garis singgung pada $L \equiv (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = 2\frac{1}{4}$ yang :
- bergradien -5
 - membentuk sudut $\frac{3}{4}\pi$ terhadap sumbu X positif
 - sejajar dengan garis $4y = 3x - 2$
 - tegak lurus dengan garis $4x - 3y + 1 = 0$
18. Tentukan persamaan garis singgung pada $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ yang :
- bergradien $\sqrt{3}$
 - tegak lurus dengan $2x - 8y - 5 = 0$
 - sejajar dengan $y + 2x = 1$
19. Garis $y = x$ dengan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0$ berpotongan di titik A dan B. Tentukan persamaan lingkaran yang berdiameter AB !
20. Tentukan Persamaan Lingkaran yang melalui titik $(1, 0)$ dan menyinggung garis $3x + 2y = 4$ di titik $(2, -1)$!
21. Diketahui garis $y = x + 1$ menyinggung lingkaran L dititik dengan absis 3. Garis $y = 2x$ melalui pusat lingkaran L. Tentukan jari - jari lingkaran L tersebut !
22. Titik $A(r, r)$ terletak pada lingkaran L yang berpusat di $O(0, 0)$. Tentukan titik potong garis yang menyinggung L di titik A dengan sumbu X !
23. Garis g merupakan garis singgung melalui titik $A(3, -4)$ pada lingkaran $25 - x^2 - y^2 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ yang sejajar dengan garis g !
24. Diberikan titik $R(1, 4)$ dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2y = 1$. Tentukan :
- posisi titik R terhadap L
 - Persamaan garis polar lingkaran dari titik R
 - Panjang AB jika A dan B titik potong garis polar dengan lingkaran
 - Persamaan garis singgung yang melalui titik A dan B

25. Buktikan bahwa sudut antara dua garis singgung melalui $O(0, 0)$ pada lingkaran $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ adalah $\frac{\pi}{2}$!

Soal Pengayaan

Pilih satu jawaban yang tepat !

- Persamaan lingkaran yang melalui titik $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ dan $C(1, 0)$ adalah
 - $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$
- Persamaan lingkaran yang melalui titik $A(4, 3)$ dan $B(-2, 5)$ serta pusat lingkaran pada garis $3x + 2y - 11 = 0$ adalah
 - $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 11 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 11 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 11 = 0$
- Agar lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - p = 0$ menyinggung garis $3x - 4y = 0$, maka nilai p adalah
 - 0
 - 9
 - 11
 - 18
 - 25

4. Tempat kedudukan titik M terhadap titik P(2, -1) dan Q(6, 2) sehingga $|PM|^2 = 2 |MQ|^2$ adalah lingkaran yang berpusat di titik
- a. (12, -3) d. (10, 5)
b. (-12, 3) e. (-10, -5)
c. (8, 5)
5. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ pada titik (5, 1) adalah
- a. $3x - 4y + 19 = 0$
b. $3x + y - 19 = 0$ d. $3x + 4y - 19 = 0$
c. $3x - 4y - 19 = 0$ e. $3x + 4y + 19 = 0$
6. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$ berjari-jari 2, garis $x - y = 0$ akan menyinggung lingkaran tersebut bila nilai p yang positif sama dengan
- a. $2\sqrt{2}$ b. 4 c. $4\sqrt{2}$ d. 8 e. $6\sqrt{2}$
7. Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ di titik (2, 3) menyinggung lingkaran $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = p$. Nilai p =
- a. $\sqrt{5}$ b. $\sqrt{13}$ c. 12 d. 5 e. 13
8. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ melalui titik A(5, -1). Jari-jari lingkaran tersebut adalah ...
- a. 3 d. $\sqrt{7}$
b. 4 e. $2\sqrt{6}$
c. 9
9. Jarak antara titik pusat lingkaran $x^2 - 4x + y^2 + 4 = 0$ dari sumbu Y adalah
- a. 3 d. 1,5
b. 2,5 e. 1
c. 2
10. Salah satu persamaan garis singgung dari titik (0, 2) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ adalah

Lingkaran XI Wajib Sem 1/2016-2017

a. $y = x\sqrt{3} - 2$

d. $y = -x\sqrt{3} - 2$

b. $y = x\sqrt{3} + 1$

e. $y = -x\sqrt{3} + 2$

c. $y = -x\sqrt{3} + 1$

11. Jika lingkaran $x^2 + y^2 + 2px + 10y + 9 = 0$ mempunyai jari-jari 5 dan menyinggung sumbu X. maka pusat lingkaran tersebut adalah

a. $(-5, -3)$

d. $(-6, 5)$

b. $(-5, 3)$

e. $(3, -5)$

c. $(6, -5)$

12. Pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y - 12 = 0$ berturut-turut adalah

a. $(2, 1)$ dan 3

d. $(2, 1)$ dan 4

b. $(-2, 1)$ dan 3

e. $(-2, 1)$ dan 4

c. $(2, -1)$ dan 3

13. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 20x + 16y + 139 = 0$ di titik $(6, -5)$ adalah

a. $4x + 3y + 39 = 0$

d. $4x - 3y + 39 = 0$

b. $4x + 3y - 39 = 0$

c. $4x - 3y - 39 = 0$

e. $3x + 4y - 39 = 0$

14. Persamaan garis singgung melalui titik $(0, 5)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ adalah

a. $2x + y = 10$ dan $-2x + y = 10$

b. $x + 2y = 10$ dan $x - 2y = -10$

c. $x + 2y = 10$ dan $x - 2y = 10$

d. $2x + y = -10$ dan $2x - y = 10$

e. $x + 2y = -10$ dan $x - 2y = -10$

15. Jika lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + ky - 12 = 0$ melalui titik $(-2, 8)$. Jari-jari lingkaran tersebut adalah

a. 1

d. 12

b. 5

e. 25

c. 6

16. Lingkaran $x^2 + y^2 + 2x + 2py + 9 = 0$ mempunyai jari-jari dan menyinggung sumbu Y. Pusat lingkaran tersebut adalah
- a. (-3, -1)
 - b. (3, -1)
 - c. (-1, -6)
 - d. (-1, 6)
 - e. (-1, 3)
17. Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (-3, 4) menyinggung lingkaran dengan pusat (10, 5) dan jari-jari r. Nilai r = ...
- a. 3
 - b. 5
 - c. 7
 - d. 9
 - e. 11
18. Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan melalui titik (3, 2) adalah
- a. $x^2 + y^2 = 2$
 - b. $x^2 + y^2 = 3$
 - c. $x^2 + y^2 = 7$
 - d. $x^2 + y^2 = 11$
 - e. $x^2 + y^2 = 13$
19. Jari-jari lingkaran dengan persamaan $2x^2 + 2y^2 = 36$ adalah
- a. $3\sqrt{2}$
 - b. 6
 - c. $6\sqrt{2}$
 - d. 18
 - e. 36
20. Persamaan lingkaran dengan pusat (2, -3) dan jari-jari 4 adalah
- a. $x^2 + y^2 - 4x + 6x + 3 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 - 4x + 6x - 3 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 - 4x + 6x + 25 = 0$
 - d. $x^2 + y^2 - 4x + 6x - 25 = 0$
 - e. $x^2 + y^2 - 4x + 6x + 16 = 0$
21. Persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 8) dan menyinggung garis $x - 7 = 0$ adalah ...
- a. $x^2 + y^2 - 4x - 16y - 25 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 + 4x - 16y - 25 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$
 - d. $x^2 + y^2 + 4x - 16y - 43 = 0$
 - e. $x^2 + y^2 - 4x + 16y + 43 = 0$
22. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax + 6y + 49 = 0$ menyinggung sumbu X untuk $a = \dots$

Lingkaran XI Wajib Sem 1/2016-2017

- a. -7 b. -3 c. 2 d. 3 e. 7

23. Pusat lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ adalah ...

- a. (2, 1) d. $\left(\frac{1}{3}, 5\right)$
b. (2, -3) e. $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$
c. (-2, 3)

24. Persamaan lingkaran berpusat di (2, 3) yang melalui (5, -1) adalah ...

- a. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 25 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 10 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 25 = 0$

25. Persamaan lingkaran yang berpusat di (-4, 7) dan berjari-jari 6 adalah ...

- a. $x^2 + y^2 - 8x - 14y - 36 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 8x + 14y - 36 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 8x - 14y - 36 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 8x - 14y - 29 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 29 = 0$

26. Lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 81$ akan menyinggung sumbu X jika ...

- a. $a = 81$ d. $a = 9$ atau $a = -9$
b. $b = 81$ e. $b = 9$ atau $b = -9$
c. $a = 9$

27. Jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ adalah ...

- a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

28. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 6y - (8 + b) = 0$ memiliki jari-jari 5, maka nilai b adalah ...

- a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

29. Persamaan garis singgung di titik (-3, 4) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah ...

- a. $3y - 4x + 25 = 0$ d. $4y + 3x - 25 = 0$

Lingkaran XI Wajib Sem 1/2016-2017

- b. $3y + 4x - 25 = 0$ e. $4y - 3x - 25 = 0$
c. $4y - 3x + 25 = 0$
30. Persamaan garis singgung melalui (5, 1) pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ adalah ...
a. $3x + 4y - 19 = 0$ d. $4x - 3y + 19 = 0$
b. $3x - 4y - 19 = 0$ e. $x - 7y - 26 = 0$
c. $x + 7y - 26 = 0$
31. Jarak terdekat antara titik (-7, 2) ke lingkaran $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$ adalah ...
a. 2 b. 3 c. 4 d. 8 e. 13
32. Jika titik (-5, k) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 21 = 0$, maka nilai k adalah ...
a. -1 atau -2 d. 0 atau 3
b. 2 atau 4 e. 1 atau -6
c. -1 atau 6
33. Persamaan lingkaran dengan pusat di (-2, 3) dan menyinggung sumbu Y adalah ...
a. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$
34. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y + c = 0$ melalui titik (-5, 7). Jari-jari lingkaran adalah ...
a. $\sqrt{5}$ b. 3 c. $\sqrt{15}$ d. 4 e. 5
35. Persamaan garis yang sejajar dengan garis $x - 2y = 10$ dan membagi lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ atas dua bagian yang sama adalah...
a. $x - 2y + 2 = 0$ d. $x + 2y + 2 = 0$
b. $x - 2y - 2 = 0$ e. $x - y + 2 = 0$
c. $x + 2y - 2 = 0$
36. Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ dititik (2, 3) menyinggung lingkaran $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = a$. Nilai a adalah ...

Lingkaran XI Wajib Sem 1/2016-2017

- a. $\sqrt{5}$ b. $\sqrt{13}$ c. 5 d. 12 e. 13

37. Garis lurus yang di tarik dari titik $O(0, 0)$ dan menyinggung lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 2 = 0$ ada 2 buah. Gradien dari kedua garis singgung adalah ...
- a. -1 atau 7 d. 1 atau -7
b. -1 atau -7 e. 1 atau $\frac{1}{7}$
c. 1 atau 7
38. Salah satu persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ yang sejajar dengan garis $5x - 12y + 15 = 0$ adalah ...
- a. $5x - 12y + 10 = 0$ d. $5x + 12y + 10 = 0$
b. $5x - 12y - 10 = 0$ e. $5x - 12y + 68 = 0$
c. $5x + 12y - 10 = 0$
39. Diketahui dua lingkaran dengan jari-jari 9 cm dan 3 cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran tersebut adalah 20 cm. maka panjang garis singgung persekutuan dalam dari kedua lingkaran tersebut adalah ...
- a. 12 cm d. 18 cm
b. 14 cm e. 20 cm
c. 16 cm
40. Diketahui dua lingkaran dengan jari-jari 11 cm dan 4 cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran tersebut adalah 25 cm. maka panjang garis singgung persekutuan luar dari kedua lingkaran tersebut adalah ...
- a. 22 cm d. 28 cm
b. 24 cm e. 30 cm
c. 26 cm

Glosarry

Lingkaran	Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama (jari-jari linkaran) terhadap sebuah titik tertentu (pusat lingkaran) yang digambarkan pada bidang kartesius.
Garis Kutub	Garis yang menghubungkan titik singgung yang satu dengan titik singgung yang lain pada lingkaran.
Gradien	Perbandingan garis yang menyinggung lingkaran.

Daftar Pustaka

Drs. Sumadi dkk. 1966. *Matematika SMU 2A*. Solo : Tiga Serangkai.

Sukino. 2007. *Matematika Untuk SMA Kelas XI*. Jakarta : Erlangga.

Tim Galaksi. 2004. *GALAKSI SMU Matematika II A*. Klaten : CV.Merpati.

Tim Penyusun. 2007. *2007 Soal Pemantapan UN Matematika*. Bandung : Yrama

Widya.