Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Pemerintah suatu kota menetapkan aturan pendirian supermarket. Dalam aturan tersebut dijelaskan bahwa jarak minimal supermarket dari pasar tradisional adalah 2 km. jika seorang investor ingin mendirikan supermarket pada jalan yang sama dengan pasar tradisional, jarak supermarket dari pasar tradisional haruslah lebih atau sama dengan 2 km. Misalkan $x =$ jarak supermarket dari pasar tradisional. Aturan pendirian supermarket dapat dituliskan ke bentuk pertidaksamaan nilai mutlak $|x| \geq 2$.

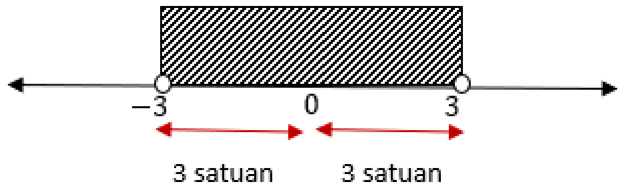
Konsep Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Pertidaksamaaan nilai mutlak adalah pertidaksamaan yang memuat tanda mutlak dan variabelnya berada di dalam tanda mutlak. Berikut ini beberapa bentuk pertidaksamaan nilai mutlak.

a. $|x - 1| < 2$
b. $|x - 3| > 4$
c. $|2x + 5| \leq 6$
d. $|3x - 1| \geq 3$

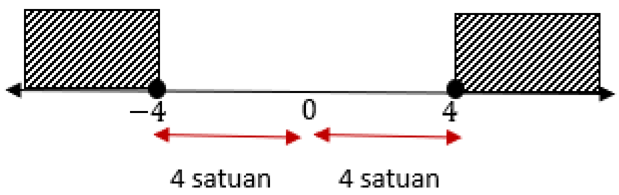
Untuk menyelesaikan masalah pertidaksamaan nilai mutlak, kita akan membahas konsep nilai mutlak dalam bentuk pertidaksamaan terlebih dahulu.

Perhatikan bentuk pertidaksamaan $|x| < 3$. Karena bentuk persamaan $|x| = 3$ menyatakan jarak antara titik x dengan nol adalah 3 satuan, maka bentuk $|x| < 3$ dapat diartikan sebagai jarak titik x dan nol adalah kurang dari 3. Dalam hal ini, kita akan mencari nilai titik x yang memenuhi. Perhatikan garis bilangan berikut.



Titik-titik yang berjarak kurang dari 3 satuan dari titik nol adalah titik-titik yang berada pada daerah yang diarsir, yaitu pada selang $-3 < x < 3$. Jadi, himpunan penyelesaiannnya dinyatakan dengan $\{x|-3 < x < 3, x \in R\}$.

Selnajutnya perhatikan bentuk $|x| \geq 4$. Bentuk tersebut berarti jarak antara titik x dan nol adalah lebih besar atau sama dengan 4 satuan. Kita akan mencari nilai titik x yang memenuhi. Perhatikan garis bilangan berikut.



Titik-titik yang berjarak lebih besar atau sama dengan 4 satuan dari titik nol adalah titik-titik pada daerah yang diarsir, yaitu pada daerah $x \leq -4$ atau $x \geq 4$. Jadi, himpunan penyelesaiannya dinyatakan dengan $\{x|x \leq -4 \; atau \; x \geq 4, x \in R\}$

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak adalah bilangan-bilangan pengganti dari variabel yang membuat pertidaksamaan menjadi pernyataan bernilai benar.

Penjelasan tersebut merupakan kasus khusus dalam menyelesaikan persamaan nilai mutlak. Hal ini dapat dituliskan dalam bentuk umum sebagai berikut.

a. Bentuk $|f(x)| \leq p \; atau \; |f(x)| \geq p$ dengan $p > 0$

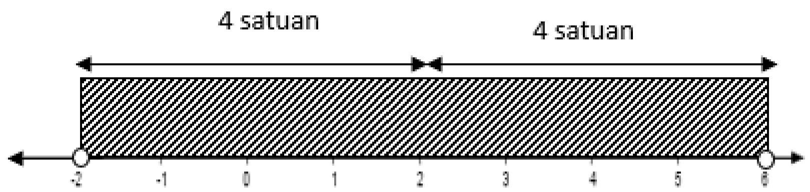
a. $|f(x)| < p \Leftrightarrow -p < f(x) < p$ dengan $p > 0$
b. $|f(x)| \leq p \Leftrightarrow -p \leq f(x) \leq p$ dengan $p > 0$
c. $|f(x)| > p \Leftrightarrow f(x) < -p \; atau \; f(x) > p$ dengan $p > 0$
d. $|f(x)| \geq p \Leftrightarrow f(x) \leq -p \; atau \; f(x) \geq p$ dengan $p > 0$

Contoh. Selesaikan pertidaksamaan nilai mutlak $|x-2| < 4$

Penyelesaian

Cara 1: Menggunakan definisi Nilai Mutlak sebagai Jarak

$|x-2| < 4$ dapat diartikan sebagai jarak bilangan x dari 2 kurang dari 4. Ada berapa bilangan x yang jaraknya dari 2 kurang dari 4? Apakah hanya ada dua bilangan x yang memenuhi? Dari garis bilangan berikut terlihat ada banyak sekali bilangan x yang memenuhi. Bilangan x yang memenuhi $|x-2| < 4$ terletak pada interval $-2 < x < 6$.



Menggunakan garis bilangan di atas tampak bilangan-bilangan yang berjarak kurang dari atau sama dengan 4 satuan dari 2 terletak pada interval $-2 < x < 6$. Pada $|x-2| < 4$, bulatan pda bilangan -2 dan 6 kosong karena -2 dan 6 tidak termasuk penyelesaian. Jadi, penyelesaian $|x-2| < 4$ adalah $-2 < x < 6$.

Cara 2. Menggunakan Definis nilai mutlak

$|x-2| < 4$ berarti

$x - 2 > -4$	dan	$x - 2 < 4$
$x > -4 + 2$		$x < 4 + 2$
$x > -2$		$x < 6$

jadi, penyelesaiannya adalah $-2 < x < 6$

Selain penulisan di atas, dapat pula menggunakan cara berikut.

$|x-2|<4$ memberikan penyelesaian $x-2>-4$ dan $x-2<4$ yang dapat ditulis dengan versi yang pebih singkat yang disebut pertidaksamaan tripel.

$$-4<x-2<4$$

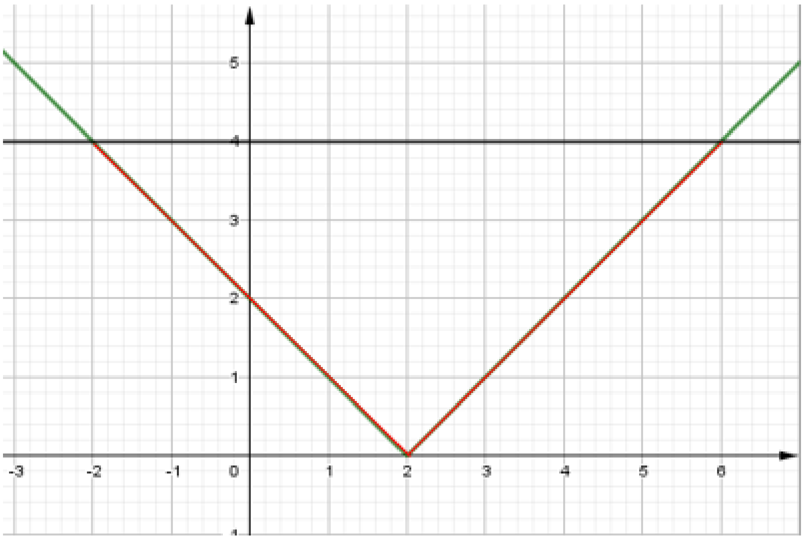
$$-4+2<x-2+2<4+2$$

$$-2<x<6$$

Cara ini yang lebih sering digunakan

Cara 3. Menggunakan Grafik

Misalkan $y_1 = |x-2|$ dan $y_2 = 4$



Grafik $y_1 = |x-2|$ terletak di bawah $y_2 = 4$ untuk nilai $-2<x<6$. Jadi, penyelesaian $|x-2|<4$ adalah $-2<x<6$

Cara 4: Menguadratkan kedua pertidaksamaan

$|x-2|<4$

$\Leftrightarrow |x-2|^2 < 4^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 < 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4^2 < 0$

$\Leftrightarrow \big((x-2)+4\big)\big((x-2)-4\big) < 0$

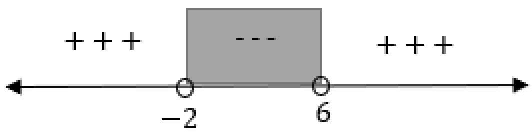
$\Leftrightarrow (x+2)(x-6) < 0$

Pembuat nol

$\Leftrightarrow (x+2) = 0\ atau\ (x-6) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 6$

Garis bilangan



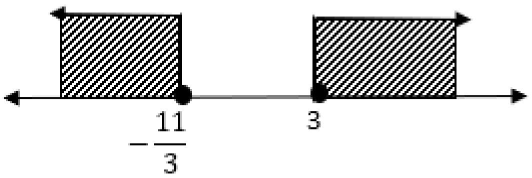
Penyelesaian adalah daerah yang bertanda negatif, karena tanda pertidaksamaan di soal adalah $<$. Jadi, penyelesaian $|x-2|<4$ adalah $-2<x<6$

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak $|3x+1| \geq 10$ dan gambar daerah himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian

$|3x+1| \geq 10$

$$\begin{array}{lcl} 3x+1 \leq -10 & \text{atau} & 3x+1 \geq 10 \\ 3x \leq -10-1 & & 3x \geq 10-1 \\ 3x \leq -11 & & 3x \geq 9 \\ x \leq \dfrac{-11}{3} & & x \geq \dfrac{9}{3} \\ & & x \geq 3 \end{array}$$



Jadi, HP= $\left\{x \middle| x \leq \frac{-11}{3} \; atau \; x \geq 3 \, , x \in R\right\}$

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak $|2x+3| \leq 7$.

Penyelesaian

$|2x+3| \leq 7$

$\Leftrightarrow -7 \leq 2x+3 \leq 7$

$\Leftrightarrow -7-3 \leq 2x+3-3 \leq 7-3$

$\Leftrightarrow -10 \leq 2x \leq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{-10}{2} \leq \dfrac{2x}{2} \leq \dfrac{4}{2}$

$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 2$

Jadi, HP= $\{x|-5 \leq x \leq 2 \, , x \in R\}$

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak $x-20>6$.

Penyelesaian

$|x - 20| > 6$

$x - 20 < -6$ atau $x - 20 > 6$

$x - 20 + 20 < -6 + 20$ $x - 20 + 20 > 6 + 20$

$x < 14$ $x > 26$

Jadi, HP= $\{x|x < 14 \; atau \; x > 26 \, , x \in R\}$

b. Bentuk $|f(x)| \leq |g(x)| \; atau \; |f(x)| \geq |g(x)|$

Cara yang digunakan untuk menyelesaikan adalah menguadratkan kedua ruas pertidaksamaan.

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak $|2x + 3| \leq |x + 4|$.

Penyelesaian

$|2x + 3| \leq |x + 4|$

$\Leftrightarrow |2x + 3|^2 \leq |x + 4|^2$

$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 \leq (x + 4)^2$

$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 - (x + 4)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \big((2x + 3) + (x + 4)\big)\big((2x + 3) - (x + 4)\big) \leq 0$

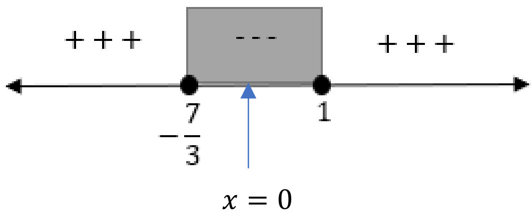
$\Leftrightarrow (3x + 7)(x - 1) \leq 0$

Pembuat nol

$\Leftrightarrow (3x + 7) = 0 \; atau \; (x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \; atau \; x = 1$

Garis bilangan



Uji $x = 0$

$(3.0 + 7)(0 - 1) = (7)(-1) = -7 < 0$ atau negatif

Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak $|2x + 3| \leq |x + 4|$ adalah

$\left\{x \middle| -\frac{7}{3} \leq x \leq 1 \; , x \in R\right\}$

Contoh. Tentukan batas-batas nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x + 6| \geq |x + 5|$

Penyelesaian

Kuadratkan kedua ruas $|2x + 6| \geq |x + 5|$

$\Leftrightarrow |2x + 6|^2 \geq |x + 5|^2$

$\Leftrightarrow (2x + 6)^2 \geq (x + 5)^2$

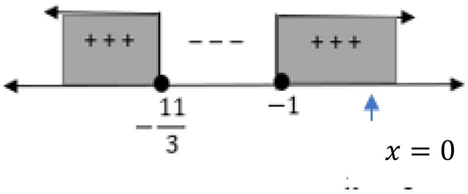
$\Leftrightarrow (2x + 6)^2 - (x + 5)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow ((2x + 6) - (x + 5))((2x + 6) + (x + 5)) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(3x + 11) \geq 0$

Pembuat nol

$x + 1 = 0$ atau $3x + 11 = 0$
$x = -1$ atau $x = -\frac{11}{3}$



Uji $x = 0$
$(0 + 1)(3.0 + 11) = (1)(11) = 11 > 0$ atau positif
Jadi, batas-batas nilai x yang memenuhi adalah $x < -\frac{11}{3}$ atau $x > -1$

c. Bentuk $|f(x)| \leq g(x) atau\ \ |f(x)| \geq g(x)$

a. $|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x)$
b. $|f(x)| \leq g(x) \iff -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$
c. $|f(x)| > g(x) \iff f(x) < -g(x)\ atau\ f(x) > g(x)$
d. $|f(x)| \geq g(x) \iff f(x) \leq -g(x)\ atau\ f(x) \geq g(x)$

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $|2x - 3| \geq x - 1$

Penyelesaian

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)\ atau\ f(x) > g(x)$$

$|2x - 3| \geq x - 1$

$2x - 3 \leq -(x - 1)$	atau	$2x - 3 \geq x - 1$
$\Leftrightarrow 2x - 3 \leq -x + 1$		$\Leftrightarrow 2x - x \geq -1 + 3$
$\Leftrightarrow 2x + x \leq 1 + 3$		$\Leftrightarrow x \geq 2$
$\Leftrightarrow 3x \leq 4$		
$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{4}{3}$		

Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan $|2x - 3| \geq x - 1$ adalah $\left\{x \middle| x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2\right\}$

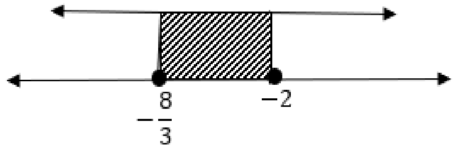
Contoh. Tentukan nilai x yang memenuhi jika $|2x + 5| \leq x + 3$

Penyelesaian

$|2x + 5| \leq x + 3$
$\Leftrightarrow -(x + 3) \leq (2x + 5) \leq (x + 3)$

$\Leftrightarrow -(x + 3) \leq (2x + 5)$	dan	$(2x + 5) \leq (x + 3)$
$\Leftrightarrow -x - 3 \leq 2x + 5$		$\Leftrightarrow 2x - x \leq 3 - 5$
$\Leftrightarrow -x - 2x \leq 5 + 3$		$\Leftrightarrow x \leq -2$
$\Leftrightarrow -3x \leq 8$		

$\Leftrightarrow x \geq -\dfrac{8}{3}$



Penyelesaian adalah $x \geq -\frac{8}{3}$ dan $x \leq -2$. Dapat ditulis menjadi $-\boldsymbol{\frac{8}{3}} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{-2}$

d. Bentuk $|f(x)| + |g(x)| \leq h$ atau $|f(x)| + |g(x)| \geq h$

Contoh. Tentukan bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x + 1| \;\geq\; 5 - |2x|$

Penyelesaian

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & jika\ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ -2x-1, & jika\ x < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad |2x| = \begin{cases} 2x, & jika\ x \geq 0 \\ -2x, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

Kita akan meninjau penyelesaian dari beberapa kasus

Kasus I: $\boldsymbol{x < -\frac{1}{2}}$ $\|2x+1\| \;\geq\; 5 - \|2x\|$ $-2x - 1 \geq 5 - (-2x)$ $-2x - 1 \geq 5 + 2x$ $-2x - 2x \geq 5 + 1$ $-4x \geq 6$ $x \leq -\dfrac{6}{4}$ $x \leq -\dfrac{3}{2}$ Irisan $\boldsymbol{x} < -\frac{1}{2}$ dan $x \leq -\dfrac{3}{2}$ adalah $x \leq -\frac{3}{2}$	**Kasus II:** $\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leq x < 0}$ $\|2x+1\| \;\geq\; 5 - \|2x\|$ $2x + 1 \geq 5 - (-2x)$ $2x + 1 \geq 5 + 2x$ $1 \geq 5$ Pernyataan bernilai salah. Tidak ada nila x yang memenuhi	**Kasus III:** $\boldsymbol{x \geq 0}$ $\|2x+1\| \;\geq\; 5 - \|2x\|$ $2x + 1 \geq 5 - 2x$ $2x + 2x \geq 5 - 1$ $4x \geq 4$ $x \geq \dfrac{4}{4}$ $x \geq 1$ Irisan $\boldsymbol{x \geq 0}$ **dan** $x \geq 1$ adalah $x \geq 1$

Gabungan dari ketiga kasus di atas diperoleh $x \leq -\frac{3}{2}$ atau $x \geq 1$

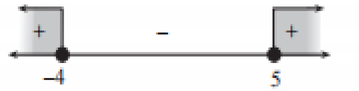
Jadi, bilangan real x yang memenuhi adalah $x \leq --\frac{3}{2}$ atau $x \geq 1$

e. Pertidaksamaan Nilai Mutlak yang diubah ke dalam bentuk persamaan kuadrat

Contoh. Jika $|2x - 3|^2 - |2x - 3| \geq 20$, tentukan nilai x yang memenuhi

Penyelesaian

Misalkan $p = |2x - 3|$ maka pertidaksamaan menjadi $p^2 - p \geq 20$
$\Leftrightarrow p^2 - p - 20 \geq 0$
$\Leftrightarrow (p + 4)(p - 5) \geq 0$
Pembuat nol:
$p + 4 = 0$ atau $p - 5 = 0$
$p = -4$ atau $p = 5$



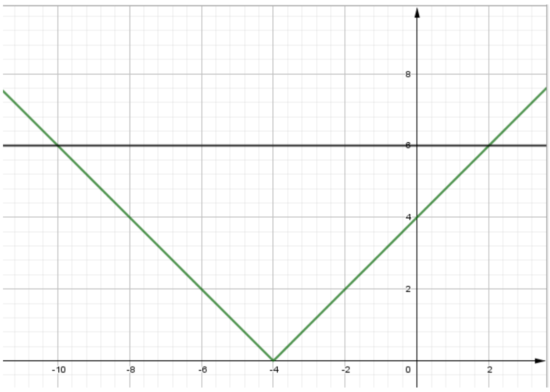
Nilai p yang memenuhi adalah $p \leq -4$ atau $p \geq 5$
$|2x - 3| \leq -4$ atau $|2x - 3| \geq 5$
Untuk $|2x - 3| \leq -4$ tidak ada nilai x yang memenuhi
Untuk $|2x - 3| \geq 5$
$\Leftrightarrow 2x - 3 \leq -5$ atau $2x - 3 \geq 5$
$\Leftrightarrow 2x \leq -5 + 3$atau $2x \geq 5 + 3$
$\Leftrightarrow 2x \leq -2$ atau $2x \geq 8$
$\Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{2}$ atau $x \geq \frac{8}{2}$
$\Leftrightarrow x \leq -1$ atau $x \geq 4$
Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x \leq -1$ atau $x \geq 4$

Latihan

1. Tentukan bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x-9|<3$
2. Tentukan penyelesaian dari $|4+x|-6<0$ dengan cara grafik
3. Tentukan bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $|3x+5|\geq 19$
4. Tentukan semua bilangan real yang memenuhi $|x+7|\geq|4x-2|$
5. Tentukan himpunan penyelesaian $|4x-6|<3x+4$
6. Tentukan himpunan penyelesaian $25-|10x+5|\geq|4x-20|$
7. Tentukan himpunan penyelesaian $|x-4|^2-2|x-4|-3<0$

Kunci Jawaban

1. $3<x<6$
2. Dengan cara grafik



3. $x\leq -8$ atau $x\geq \frac{14}{3}$
4. $-1\leq x\leq 3$
5. $\frac{2}{7}<x<10$
6. $-\frac{5}{7}\leq x\leq 0$
7. $1<x<7$